W2IN005

TD 2

Exo 1 :

1. w est majorant de V ssi $w \in W$ et $\forall v \in V, v \preceq w$

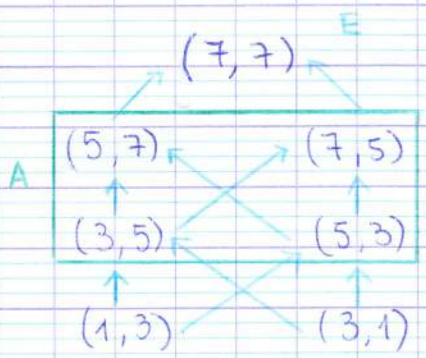
   Majorants de V : $1, 2, 3$

2. Minorants de V : $\{6, 8\}$

3. Oui, $\sup(V) = 3$. Notons que $3 \notin V$

4. Oui, $\inf(V) = 6$. Notons que $6 \in V$

Exo 2 :



x maximal de X

ssi $x \in X$ et $\forall y \in X$, $x \not\preceq y$

ssi $x \in X$ et $y \in X$, si $x \preceq y$ alors $x = y$

- les maximaux : $\{(5,7), (7,5)\}$
- les minimaux : $\{(3,5), (5,3)\}$
- les majorants : $\{(7,7)\}$
- les minorants : $\{(1,3), (3,1)\}$
- $\sup(A) = (7,7)$
- $\inf(A)$ n'existe pas
- minimum n'existe pas
- maximum n'existe pas

Exo 3 : 1. relation d'ordre : réflexive, transitive, antisymétrique

- réflexive : comme $(a,b) = (a,b)$ $\forall a,b \in \mathbb{N}$, on a $(a,b) \preceq (a,b)$
- transitive : Supposons $(a,b) \preceq (c,d)$ et $(c,d) \preceq (e,f)$

  On a 2 possibilités :

  – $a+b < c+d$. On a encore 2 cas :

  - $c+d < e+f$ par transitivité de $(\mathbb{N}, <)$, on a $a+b < e+f$ donc $(a,b) \preceq (e,f)$
  - $(c,d) = (e,f)$, $c+d = e+f$ donc $a+b < e+f$ et $(a,b) < (e,f)$

  – $(a+b) = (c,d)$ et $(c,d) \preceq (e,f)$. Donc $(a,b) \preceq (e,f)$
- antisymétrique : si $(a,b) \preceq (c,d)$ et $(c,d) \preceq (a,b)$,
  on a $a+b < c+d$ et $c+d < a+b$ contradiction
  donc $(a,b) = (c,d)$.

Alors $\preceq$ est une relation d'ordre

2. L'ordre n'est pas total. Prenons $(3,2)$ et $(2,3)$.
On a $3+2 = 2+3$ donc $3+2 \not< 2+3$ et $(3,2) \neq (2,3)$

Déf : une relation $\preceq$ sur un ensemble E est bien fondée ssi il n'existe pas une suite infinie strictement décroissante $e_1 > e_2 > \dots$ d'éléments de E
ex : $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien fondée mais $(\mathbb{Z}, \leq)$ ne l'est pas

L'ordre est bien fondé, parce que $(0,0)$ est le plus petit élément

3.
$$\begin{tikzcd} & (2,2) & \\ (2,1) \arrow[ur] & & (1,2) \arrow[ul] \\ & (0,2) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
A

- éléments maximaux : $\{(2,2)\}$
  " minimaux : $\{(0,2)\}$
- majorants : $\{(2,2)\} \cup \{(n_1,n_2) \mid n_1+n_2 > 4\}$
  minorants : $\{(0,2), (0,1), (1,0), (0,0)\}$
- maximum : $(2,2)$
  minimum : $(0,2)$
- $\sup(A) = (2,2)$ $\inf(A) = (0,2)$

4.
$$\begin{tikzcd}
(1,2) & (3,0) & (2,1) \\
 & (1,1) \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \\
(0,1) \arrow[ur] & & (1,0) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

B

- éléments maximaux : $\{(1,2),(2,1),(3,0)\}$
  " minimaux : $\{(0,1),(1,0)\}$
- majorant : $\{(n_1,n_2) \mid n_1+n_2 > 3\}$
  minorant : $\{(0,0)\}$
- maximum et minimum n'existent pas
- $\sup(B)$ n'existe pas . $\inf(B)=(0,0)$

Ex04 : 1. · réflexive : x divise x pour tout $x\in E$

· antisymétrique : si x divise y et y divise x, alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tq $y=kx$ et $\exists\, l \in\mathbb{N}$ tq $x=yl$ donc

$x=(xk)l \Leftrightarrow 0 = x(1-kl)$

$\Leftrightarrow 0 = 1-kl$ car $x\in E$ donc $x\neq 0$

$\Leftrightarrow kl=1 \Leftrightarrow l=k=1$ donc $x=y$

· transitive si x divise y et y divise z alors $\exists\, k,l \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tq

$y=kx$ et $z=ly \Rightarrow z=l(kx)$

comme $kl\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $z=nx$ donc x divise z.

2. · Si $p\in E$ est un nombre premier, alors seulement p divise p ($1\notin E$)
Alors tous les nombres premiers sont des minimaux.
· Si $a\in E$ n'est pas premier, alors il existe $b\in E$ tq b divise a donc b est inférieur ou égal à a pour l'ordre « x divise y »
Alors a ne peut pas être minimal. Donc les minimaux sont précisément des nombres premiers.

3. Soit $a\in E$ maximal, notons que a divise $2a$ donc $2a$ est plus grand que a donc a n'est pas maximal.

Exo 5 : 1. Soit $A = \{a, b\}$, la borne inf est leur pgcd et la borne sup est leur ppcm

2. A : majorants : tous les multiples de $ppcm(A) = ppcm(6, 15, 21) = 210$
donc 210 et ses multiples.
- minorants : tous les diviseurs de $pgcd(A) = pgcd(6, 15, 21) = 3$
- Il n'y a pas de plus petit ou plus grand élément.