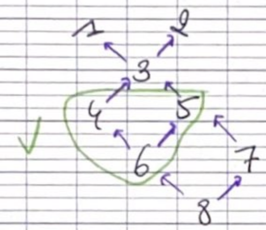
WLIN005

TD 2.

Exo 1 : Soit $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ordonné

$V = \{4, 5, 6\}$.



1) Trouver les majorants de V.

Def : w est majorant de V, ssi $w \in W$ et $\forall v \in V$, $v \leq w$.

Solᵒ : Majorants de V : $1, 2, 3$.

2) Trouver les minorants

Solᵒ : Minorants de V : $\{6, 8\}$ ($7 \notin$ car 7 n'est pas comparé à 6)

3) Sup (V) existe ?

↳ le plus petit des majorants (= la borne supérieure de V)

Solᵒ : oui, $\sup(V) = 3$. Notons que $3 \notin V$.

4) Inf (V) existe ?

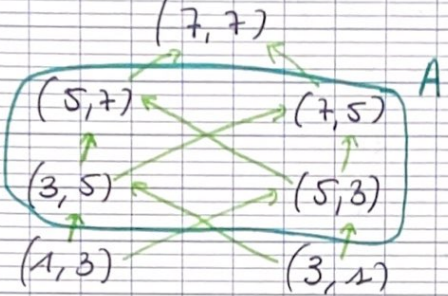
↳ le plus grand des minorants

Solᵒ : Oui, $\mathrm{Inf}(V) = 6$. Notons que $6 \in V$.

Exo 2 : R définie sur $E = \{(1,3), (3,1), (3,5), (5,3), (5,7), (7,5), (7,7)\}$ par :

$(m_1, m_2)\ R\ (n_1, n_2)$ ssi $m_1 \leq n_1$ et $m_2 \leq n_2$

Pour $A = \{(3,5), (5,3), (5,7), (7,5)\}$



Les maximums doivent appartenir à l'ensemble A.

x maximal de X
ssi $x \in X$ et $\forall y \in X$
$x \not< y$
ssi $x \in X$ et $\forall y \in X$
si $x \leq y$ alors $x = y$.
↳ pour les démonstrations

- Les maximaux : $\{(5,7), (7,5)\}$
- Les minimaux : $\{(3,5), (5,3)\}$
- Les majorants : $\{(7,7)\}$
- Les minorants : $\{(1,3), (3,1)\}$
- $\text{Sup}(A) = (7,7)$
- $\text{Inf}(A)$: n'existe pas
- minimum : n'existe pas
- maximum : n'existe pas.

Exo 3 : $\preceq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tq $(a,b) \preceq (c,d)$ ssi
$a + b < c + d$ ou $(a,b) = (c,d)$

1) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.

Sol° : . Réflexive : Comme $(a,b) = (a,b)$ $\forall a, b \in \mathbb{N}$
On a $(a,b) \preceq (a,b)$

. Transitive : Supposons $(a,b) \preceq (c,d)$ et $(c,d) \preceq (e,f)$
On a deux possibilités :
- $a + b < c + d \Rightarrow$ on a encore 2 cas :
  - $c + d < e + f$, par transitivité de $(\mathbb{N}, <)$, on a $a + b < e + f$ donc $(a,b) \preceq (e,f)$

- $(c,d) = (e,f)$, $c+d = e+f$ donc $a+b < e+f$ et $(a,b) \preceq (e,f)$.
- $(a,b) = (c,d)$ et $(c,d) \preceq (e,f)$. Donc $(a,b) \preceq (e,f)$

- Antisymétrique : si $(a,b) \preceq (c,d)$ et $(c,d) \preceq (a,b)$, on a $a+b < c+d$ et $c+d < a+b \Rightarrow$ <u>CONTRADICTION</u> !
Donc, $(a,b) = (c,d)$.

Alors $\preceq$ est une relation d'ordre.

2) Ordre total ? Bien fondé ?

↳ on peut toujours comparer 2 éléments

<u>Sol°</u> : L'ordre n'est pas total. Prenons $(3,2)$ et $(2,3)$. On a $3+2 = 2+3$ donc $3+2 \not< 2+3$ et $(3,2) \neq (2,3)$

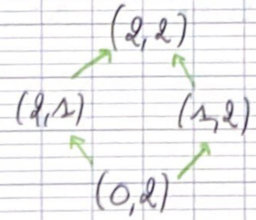
<u>Def</u> : Une relation $\preceq$ sur un ensemble E est bien fondée ssi $\nexists$ une suite infinie strictement décroissante $e_1 > e_2 > e_3 > \dots$ d'éléments de E.

- $(\mathbb{Z}, \leq)$ n'est pas bien fondée.
- $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien fondée. $n > \dots > 0$.

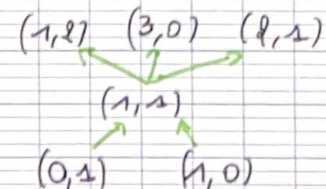
L'ordre est bien fondé parce que $(0,0)$ est le plus petit élément.

3) ~~à faire~~.

4) $B = \{(0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1), (3,0)\}$
$A = \{(0,2), (2,1), (1,2), (2,2)\}$



A



B

	A	B
éléments maximaux	$\{(2,2)\}$	$\{(1,2),(3,0),(2,1)\}$
minimaux	$\{(0,2)\}$	$\{(0,1),(1,0)\}$
majorants	$\{(2,2)\} \cup \{n_1, n_2 \mid n_1 + n_2 > 4\}$	$\{(n_1, n_2) \mid n_1 + n_2 > 3\}$
minorants	$\{(0,2), (0,1), (1,0), (0,0)\}$	$\{(0,0)\}$
maximum	$(2,2)$	$\nexists$
minimum	$(0,2)$	$\nexists$
Sup	$(2,2)$	$\nexists$
Inf	$(0,2)$	$(0,0)$

Exo important ← Exo 4 : Soit $E = \{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$
Ordonné par la relation "x divise y"

1) Montrer que c'est une relation d'ordre
- réflexive : x divise x $\forall x \in E$.
- Antisymétrique : si x divise y et y divise x. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $y = xk$ et il existe l tq $x = yl$.

Donc $x = (xk)l$

$0 = x(1 - kl)$ mais $x \in E$ donc $x \neq 0$

$0 = 1 - kl$

$kl = 1 \Rightarrow k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow k = l = 1$ donc $x = yl$

$y = kx$

$\boxed{x = y}$

- Transitive : si x divise y et y divise z alors $\exists k, l \in \mathbb{N} - \{0\}$
$y = kx$ et $z = ly \Rightarrow z = l(kx)$
mais $kl = n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $z = nx$ et x divise z.

2) Déterminer les éléments minimaux de E.
Si $p \in E$ est un nombre premier alors seulement p divise p $(1 \notin E)$. Alors tous les nombres premiers sont des minimaux.
Si $a \in E$ n'est pas premier alors $\exists b \in E$ tq b divise a, donc b est inférieur ou égal à a pour l'ordre "x divise y".
Alors a ne peut pas être minimal. Donc les minimaux sont précisément les premiers.

3) Déterminer les maximaux de E.

Soit $a \in E$ maximal, notons que a divise $2a$ donc $2a$ est plus grand que a et a n'est pas maximal.

Exo 5 : $F = \mathbb{N} - \{0\}$ et la relation "x divise y"

1) Existe-t-il une borne inférieure et une borne supérieure pour tout sous-ensemble de deux éléments ?

Solⁿ : Soit $A = \{a, b\}$, la borne inf est leur PGCD et la borne sup est leur ppcm (plus petit multiple commun).

2) $A = \{6, 15, 21\}$ et $B = \{1, 6, 14, 21\}$
minorants ? majorants ? plus petit ? plus grand ?

A : majorants → tous les multiples de PPCM(A) = PPCM(6, 15, 21) = 210.

$$\left[\left.\begin{array}{l} 6 = 2\times 3 \\ 15 = 3\times 5 \\ 21 = 7\times 3 \end{array}\right\} \quad 2\times 3\times 5\times 7 = 210\right]$$

Donc 210 et ses multiples sont les majorants.

A : minorants → PGCD(A) = PGCD(6, 15, 21) = 3

Donc les minorants sont 3 et 1.

Il n'y a pas de plus petit ou plus grand éléments car les minorants et majorants $\notin$ à E.